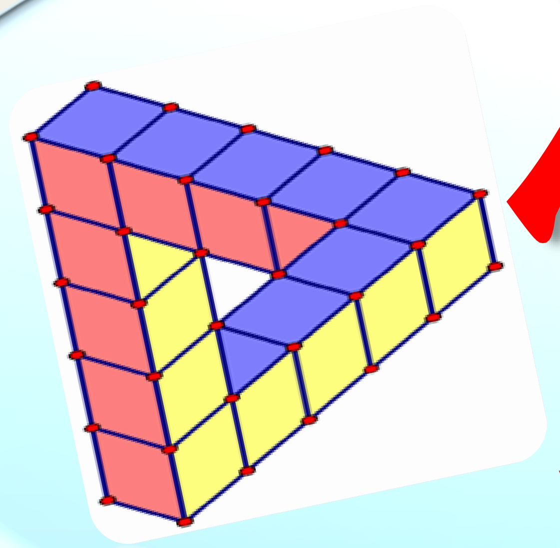


潘洛斯多邊形性質與
非週期性密鋪之研究

摘要

此篇研究由台中數學輔導團神秘幾何體積（空間概念謎題）的題目開始，我用了兩個拆解圖形的方式計算出潘洛斯三角形的體積，並延伸到潘洛斯多邊形體積。兩個不同計算體積的方式導出通式後，其中一個方式發現了潘洛斯三角形長短邊的限制關係。接著我想了解潘洛斯多邊形的投影面積和體積是否有關係，後來發現似乎沒有顯著的明顯關係。於是我想知道潘洛斯三角形該如何轉動，是否有固定的角度才可以因錯視而成為一個三角形。最後再研究潘洛斯的密鋪圖形，得知其為非週期性的密鋪，在找尋資料後發現王氏磚也是非週期性的密鋪，於是我由王氏磚的定義出發，利用巴斯卡三角形和二項式定理找出正三角形的所有圖形，並進行非週期性的密鋪。

研究動機

當已決定要做數學科展時，我著手找尋資料中偶然發現了一篇有關潘洛斯三角形體積的文章－神秘幾何體積（空間概念謎題）－台中市國中數學領域輔導團。對於裡面的潘洛斯三角形相當有興趣，於是便開始搜尋歷屆作品其中還未發現這一類的作品，且本身對於潘洛斯三角形這種錯覺的圖形覺得特別有興趣，也在想著若是潘洛斯三角形的邊數越大，他的維度變大看起來就像扭曲的形體，我覺得他會很像莫比烏斯環，想知道自己這樣的假說是否成立，便開始著手研究其各種性質，並希望可以找出潘洛斯三角形的性質和應用。在做完之後我便開始研究非週期性密鋪，以潘洛斯磁磚為延伸，開始研究王氏磚。

研究目的

（一）用不同的方式拆解潘洛斯三角形，並計算出潘洛斯三角形的體積通式，且找出其長短邊的限制關係。
（二）用不同方式計算潘洛斯多邊形的體積通式，並發現只要一看到潘洛斯三角形，知道其表面的邊長，即可得出其體積。
（三）計算潘洛斯三角形投影面積，將資料放入EXCEL中，分析面積和體積的關係。
（四）想知道潘洛斯三角形如何轉動才可以得到一個錯視的三角形，並計算其轉動的角度。
（五）由王氏磚定義出發，利用巴斯卡三角形和二項式定理找出正三角形的所有種類，並進行非週期性的鋪磚研究

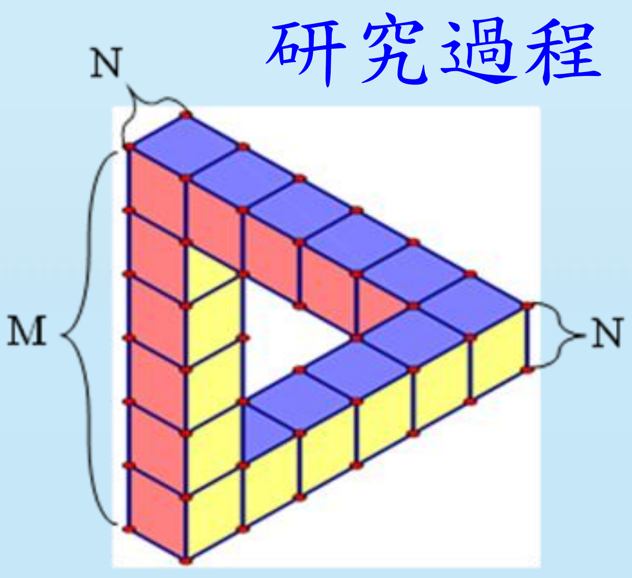
研究設備及器材

電腦、GSP軟體、紙、筆 、SketchUp軟體、Excel軟體、GGB軟體、3D列印機、XYZmarker

研究過程、方法及分析

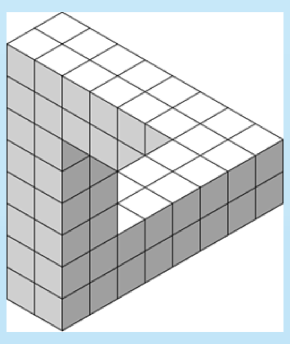
一、名詞解釋

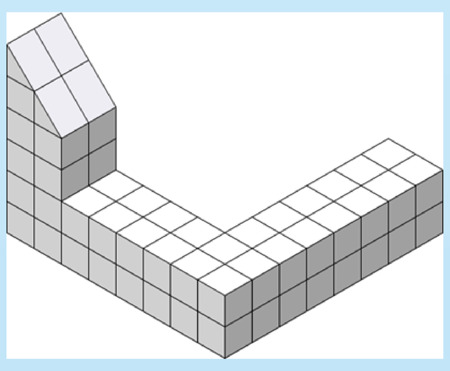
（一）M：長邊
（二） N：高和短邊
（三） T：邊的數量
（如右圖，M=6，N=1，T=3）



二、研究前提

題目如右：下面這個特殊形體，請試求它的體積



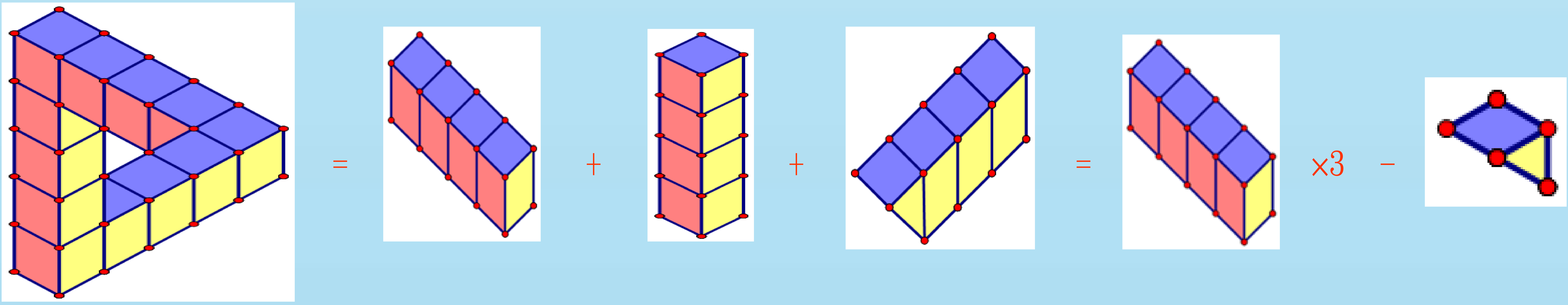


解答如下：這個特殊形體看起來是潘洛斯三角形，但把它旋轉 90 度後，它是一個很容易就能算出體積的三維物體，如上圖，體積是 68 立方單位。

三、研究一：潘洛斯三角形的體積計算

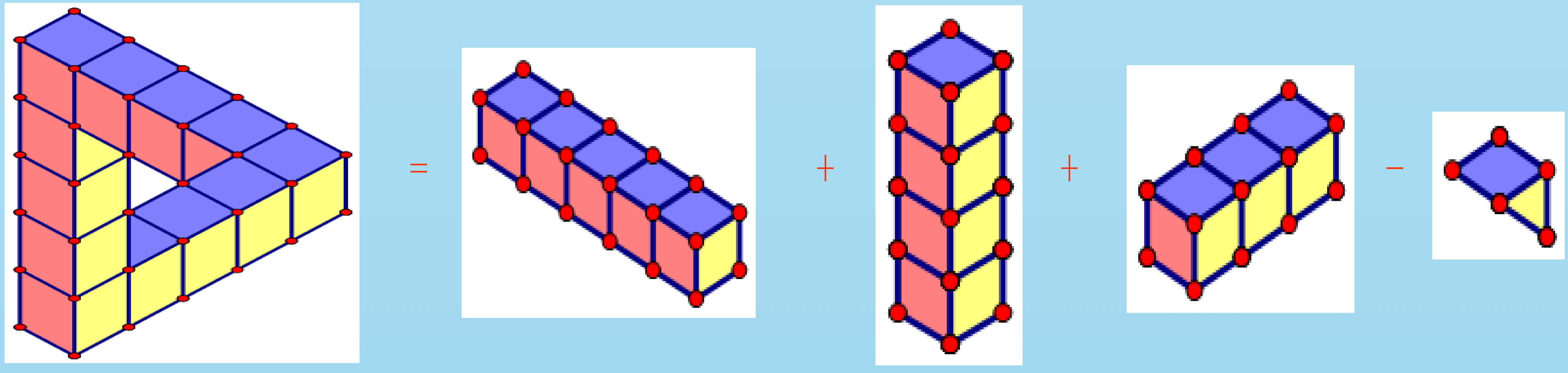
（一）方法一：

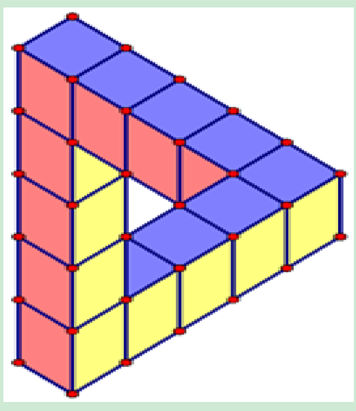
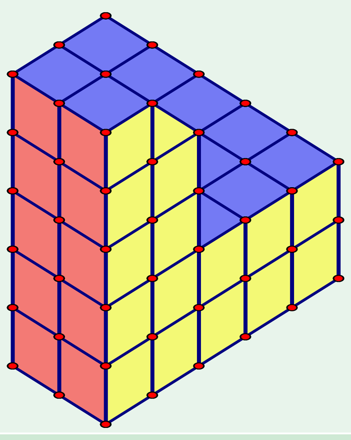
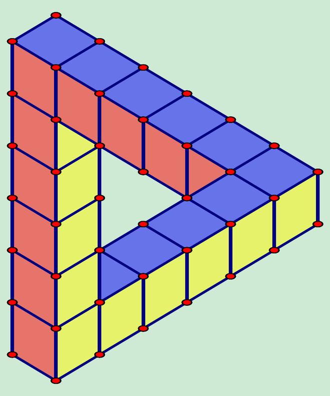
第一種方法是將潘洛斯三角形拆成三個長方體，先算出一個長方體體積後再乘以三，之後再減掉一個等腰直角三角柱體的體積，就可以算出潘洛斯三角形的體積。範例如下：



（二）方法二：

第二種計算潘洛斯三角體積的方法是將潘洛斯三角形，拆成三個長方體和一個等腰直角三角形。每一長方體盡可能拆成最長的值為主，最後再加上一個等腰直角三角形的體積。就可以算出潘洛斯三角形的體積。



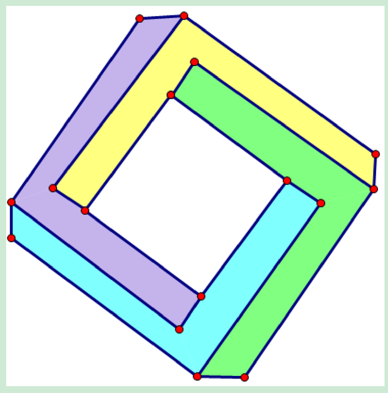
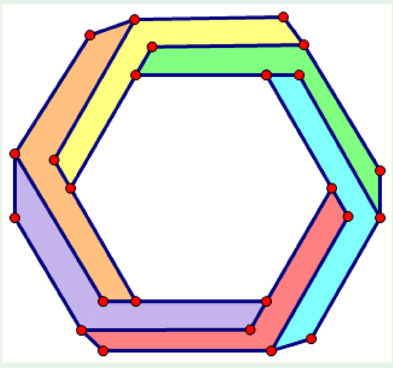
M值	N值	圖形	體積(法1)	體積(法2)
5	1		$(5-1)\times1\times1\times3-\frac{1\times1}{2}\times1$ =12 − 0.5=11.5	$5\times1\times1+(5-1)\times1\times1+(5-2-1)\times1\times1+(1\times1)/2\times1$ $=11.5$
5	2		$(5-2)\times2\times2\times3-\frac{2\times2}{2}\times2$ =36 − 4=32	$5\times2\times2+(5-2)\times2\times2+(5-4-2)\times2\times2+(2\times2)/2\times2$ = 32(5 − 4 − 2結果為負數，不合理)
6	1		$(6-1)\times1\times1\times3-\frac{1\times1}{2}\times1$ =15 − 0.5=14.5	$6\times1\times1+(6-1)\times1\times1+(6-2-1)\times1\times1+\frac{1\times1}{2}\times1$ $=14.5$

（三）兩個方法總結：

這兩個方法導出的公式經過化簡後是相同的，且經由第二個方法通式中的（M-2N-N）即可以看出M必大於3N時，此潘洛斯三角形才可以成立。也就是說長邊一定得大於短邊的三倍。這是我們在研究一時看不出來的，當時只發現畫出來的圖形看起來不像潘洛斯三角形。後來換個方式算體積時才發現若M不大於3N的話有一長條形的體積為負數，若我們可以肯定當M大於3N時潘洛斯三角形才會在立體(GSP)圖形上成立

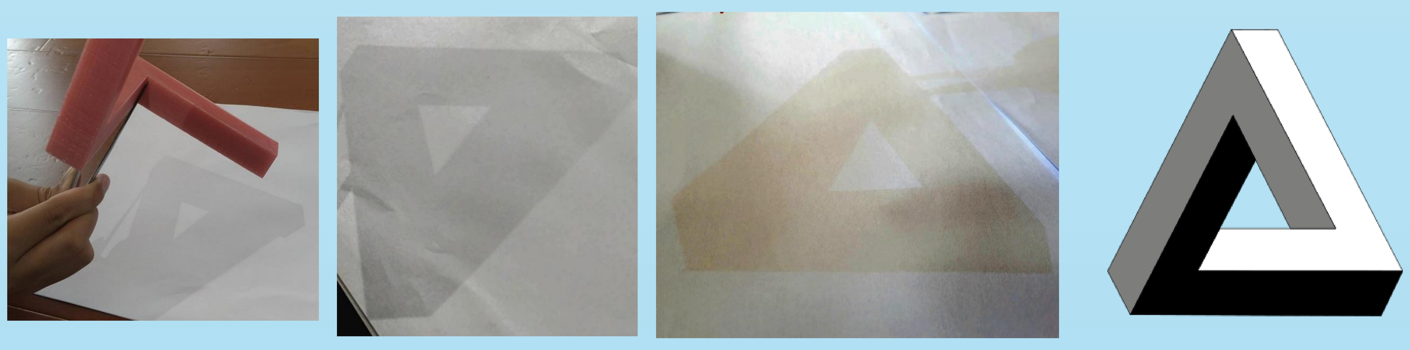
四、研究二：潘洛斯多邊形的體積

上述方法也適用於潘洛斯多邊形，其通式如下

M值	N值	T值（幾邊形）	體積	圖形
10	2	4	$(10-2)\times 2\times 2\times 4 - \frac{2\times 2}{2}\times 2 = 128-4=124$	
10	2	6	$(10-2)\times 2\times 2\times 6 - \frac{2\times 2}{2}\times 2 = 192-4=188$	
10	2	7	$(10-2)\times 2\times 2\times 7 - \frac{2\times 2}{2}\times 2 = 224-4=220(cm^7)$	略
通式：$(\mathrm{M}-\mathrm{N})\times\mathrm{N}\times\mathrm{N}\times\mathrm{T}-\frac{N\times N}{2}\times N$				

五、研究三：潘洛斯三角形的投影面積

我們利用3D軟體印出一個潘洛斯三角形的原件，再利用實務投影機實際投影後，發現其投影形狀和維基百科中的圖形相同。故利用其圖形來算出投影面積，其圖形如下：



（一）方法一：我們拆成四邊形(梯形)和三角形後再乘3

$$3\times\left[\frac{(m+m-n)\times\frac{\sqrt{3}n}{2}}{2}+\frac{n\times\frac{\sqrt{3}n}{2}}{2}\right]$$

（二）方法二：我們拆成三個平行四邊形再乘3

$$m\times\frac{\sqrt{3}n}{2}\times 3$$

（三）經化簡後發現兩個式子是相同的，於是我們整理出潘洛斯多邊形的投影面積如下：

	方法一	方法二
潘洛斯三角形	$3\times[\frac{(m+m-n)\times\frac{\sqrt{3}n}{2}}{2}+\frac{n\times\frac{\sqrt{3}n}{2}}{2}]$	$m\times\frac{\sqrt{3}n}{2}\times 3$
潘洛斯四邊形	$4\times[m\times\frac{\sqrt{2}n}{2}+\frac{\frac{\sqrt{2}n}{2}\times\frac{\sqrt{2}n}{2}}{2}]$	$\frac{(m+m+\frac{\sqrt{2}n}{2})\times\frac{\sqrt{2}n}{2}}{2}\times 4$
潘洛斯六邊形	$6\times[\frac{(m+m+\frac{\sqrt{3}n}{3})\times\frac{n}{2}}{2}+\frac{\frac{n}{2}\times\frac{\sqrt{3}n}{3}}{2}]$	$[\frac{(m+m+\frac{2\sqrt{3}n}{3})\times\frac{n}{2}}{2}]\times 6$

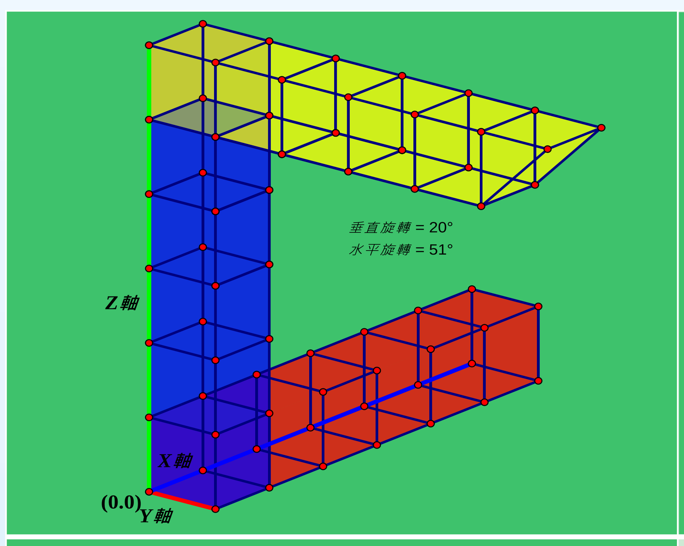
（四）我們將其數據放入Excel後，目前得到的結果可參考於附件。而我們觀察了體積和投影面積，使用許多方式比較後，並無發現其中兩者有什麼顯著的關係。

六、研究四：潘洛斯三角形的角度問題

（一）潘洛斯三角形轉動角度問題

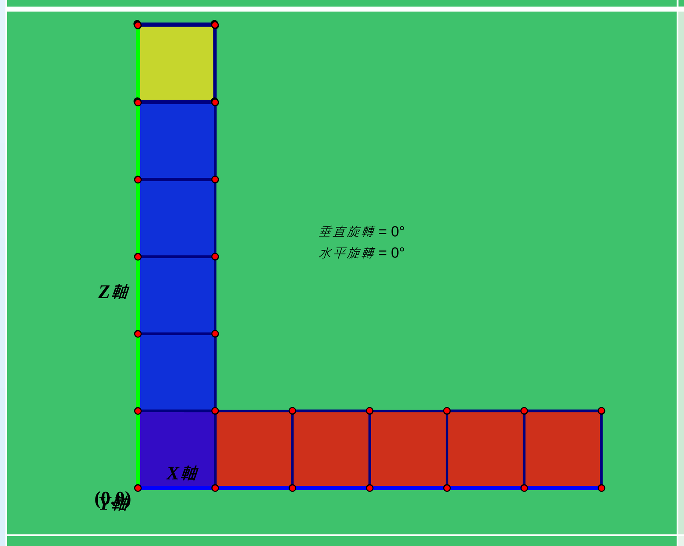
我想知道潘洛斯三角形是否轉動固定的角度才可以錯視為一個三角形。於是我利用GSP軟體先畫出互相垂直的三軸立體軸，於是我以圓點為旋轉中心，觀察其角度變化。最後驗證每一個種類的潘洛斯三角形，皆可得到同樣的結論。可經由垂直向下旋轉35度，水平逆時鐘旋轉45度呈現。

潘洛斯三角形轉動角度研究過程如下：

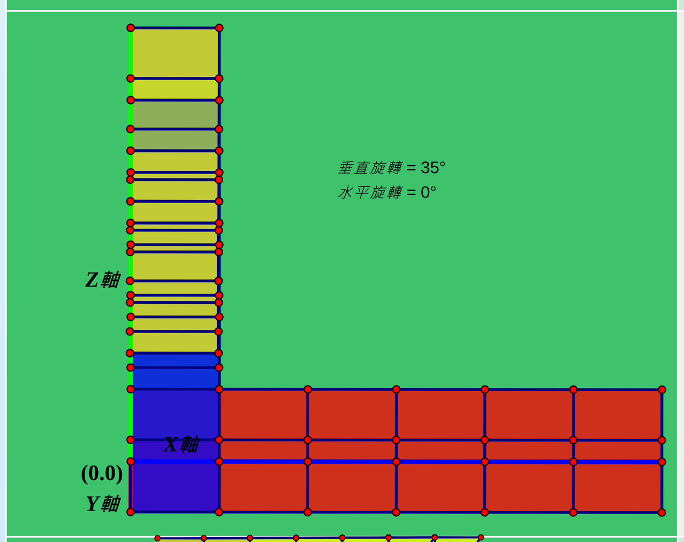


此圖為一個長邊為6，短邊為1的潘洛斯三角形。$(6\times 1\times 1)$

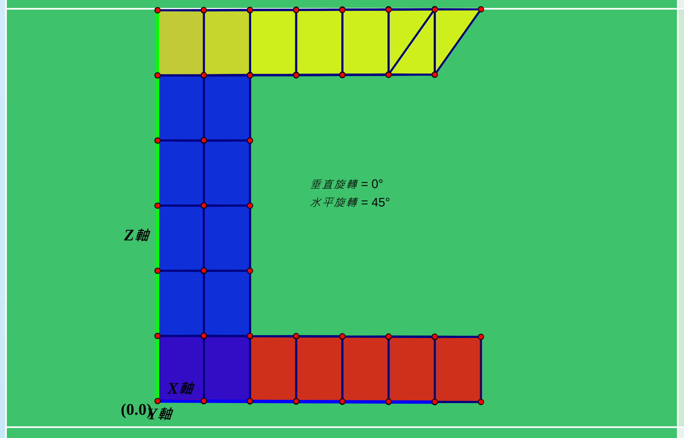
隨意擺放的角度如圖中所顯示的度數。



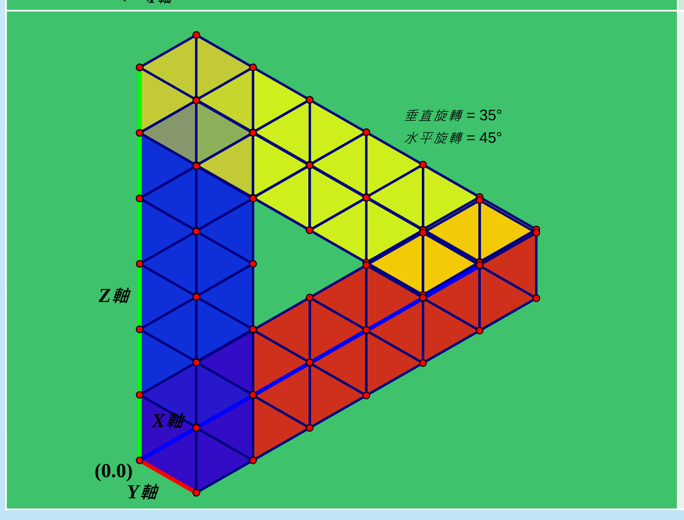
步驟一：我們先將其角度歸零。圖形如左圖所示。



步驟二：我們以原點為旋轉中心，垂直向下旋轉35度後之圖示。



步驟三：我們以原點為旋轉中心，水平逆時鐘旋轉45度後之圖示。



步驟四：結合步驟二和步驟三後發現，完美的潘洛斯三角形即呈現。

可經由垂直向下旋轉35度，水平逆時鐘旋轉45度呈現。

七、研究五：非週期性密鋪的研究

研究了潘洛斯密鋪圖形後，想知道是否有其他的方式也可以形成非週期性的密鋪，於是找了網路上非週期性密鋪的資料後發現王氏磚也是非週期性密鋪的一種。我們開始著手研究王氏磚。

（一）王氏磚定義：

王氏磚的外觀是正方形，正方形的每一邊可以有不同的顏色，也可以以各邊和中心點組成的三角形來著色，一個王氏磚中裡可以有二個至四個不同的顏色。二個王氏磚拼合時，其相鄰的邊需要有相同的顏色，在王氏磚拼合時，不允許旋轉王氏磚，王氏磚也不能翻面

（二）王氏磚四邊形的種類：

我們利用巴斯卡三角形和二項式定理來求出其圖形種類

1. 兩色：14種（4+6+4）

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

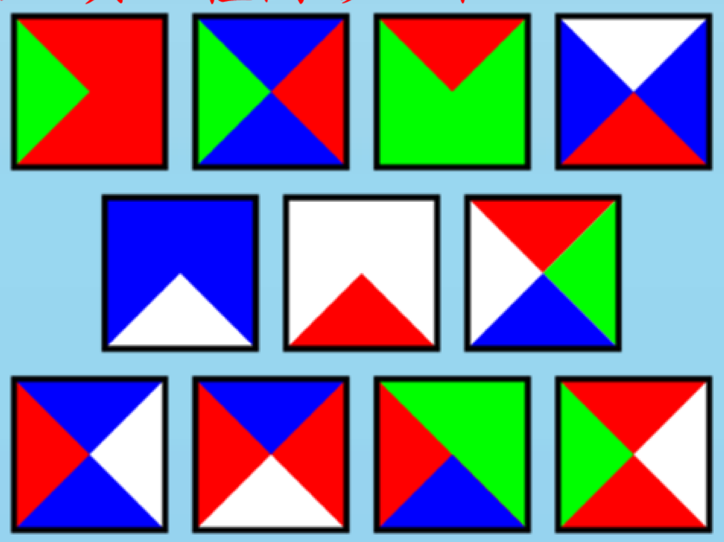
2. 三色：36種（12+12+12）

$(x+y+z)^4=(x+y)^4+4(x+y)^3z+6(x+y)^2z^2$
$+4(x+y)z^3+z^4$
$=\cdots\cdots+12x^2yz+12xy^2z+12xyz^2+\cdots\cdots$

3. 四色：24種

$(x+y+z+w)^4=\cdots\cdots+24xyzw+\cdots\cdots$

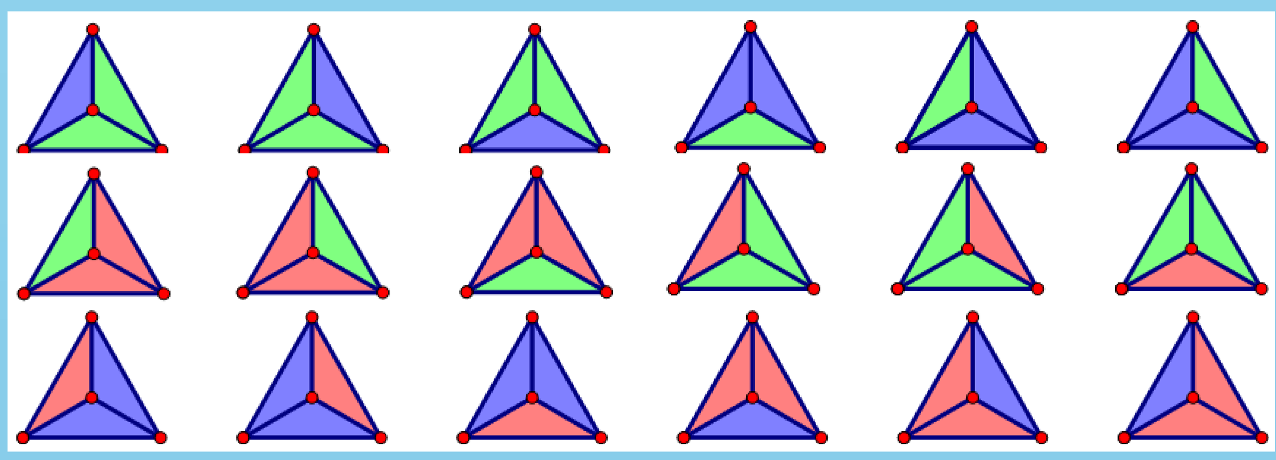
4. 根據搜尋資料，論文中證明了利用電腦程式搜尋，我們可以知道若由四色的王氏磚，最少可由11種王氏磚進行非期性的密鋪整個平面，其11種圖形如下



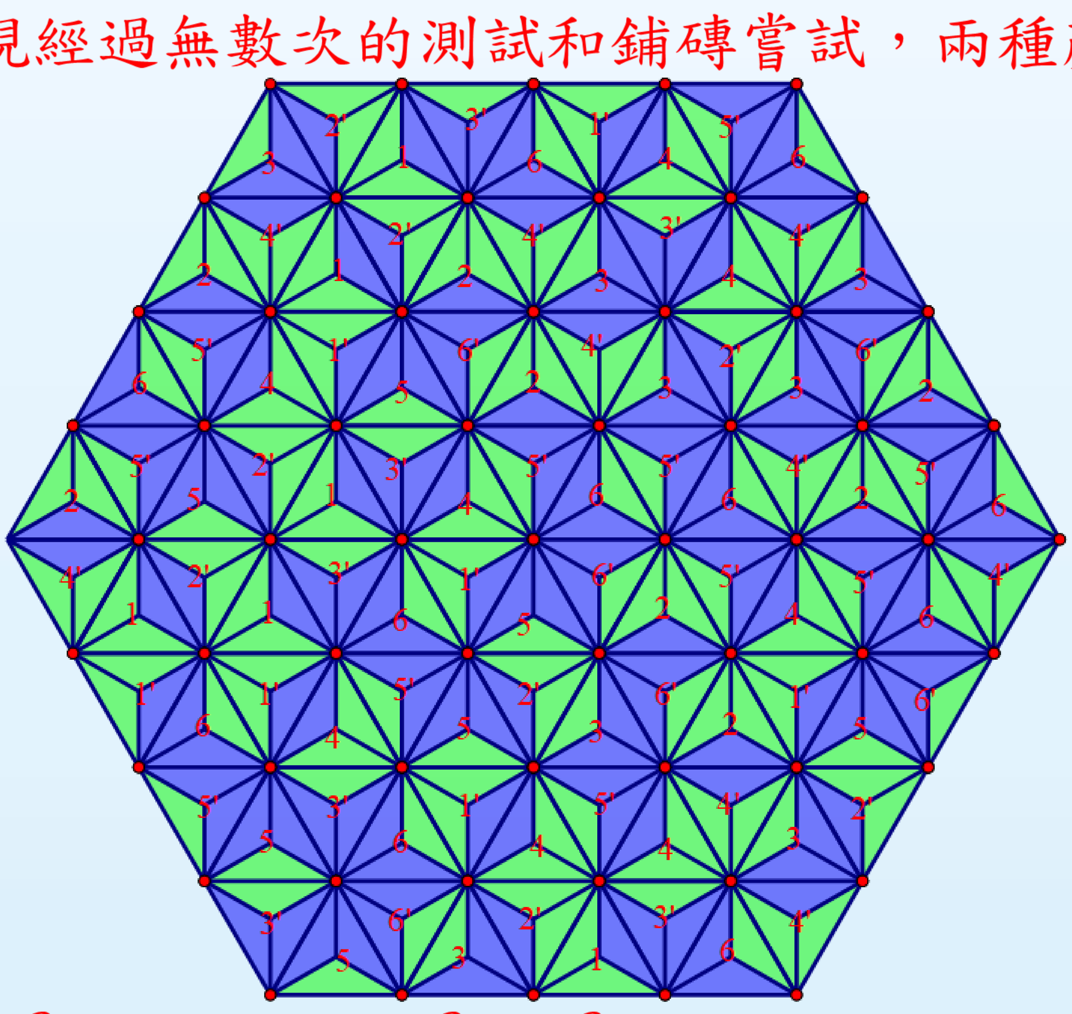
（三）王氏磚三邊形的種類：

1. 兩色：6種（3+3）

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

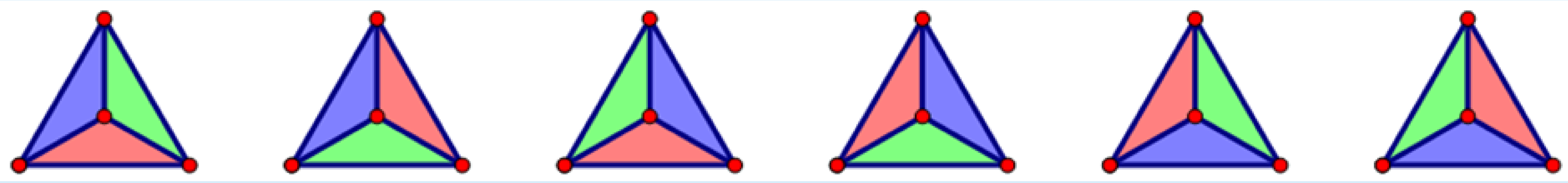


2. 目前三角形鋪磚研究圖形如下：我們根據王氏磚的定義進行鋪磚，並將每一種類進行編號，藉由編號觀察檢查是否真的為非週期性鋪磚。發現經過無數次的測試和鋪磚嘗試，兩種顏色六塊皆使用到才可進行非週期性的鋪磚。其圖形如下：

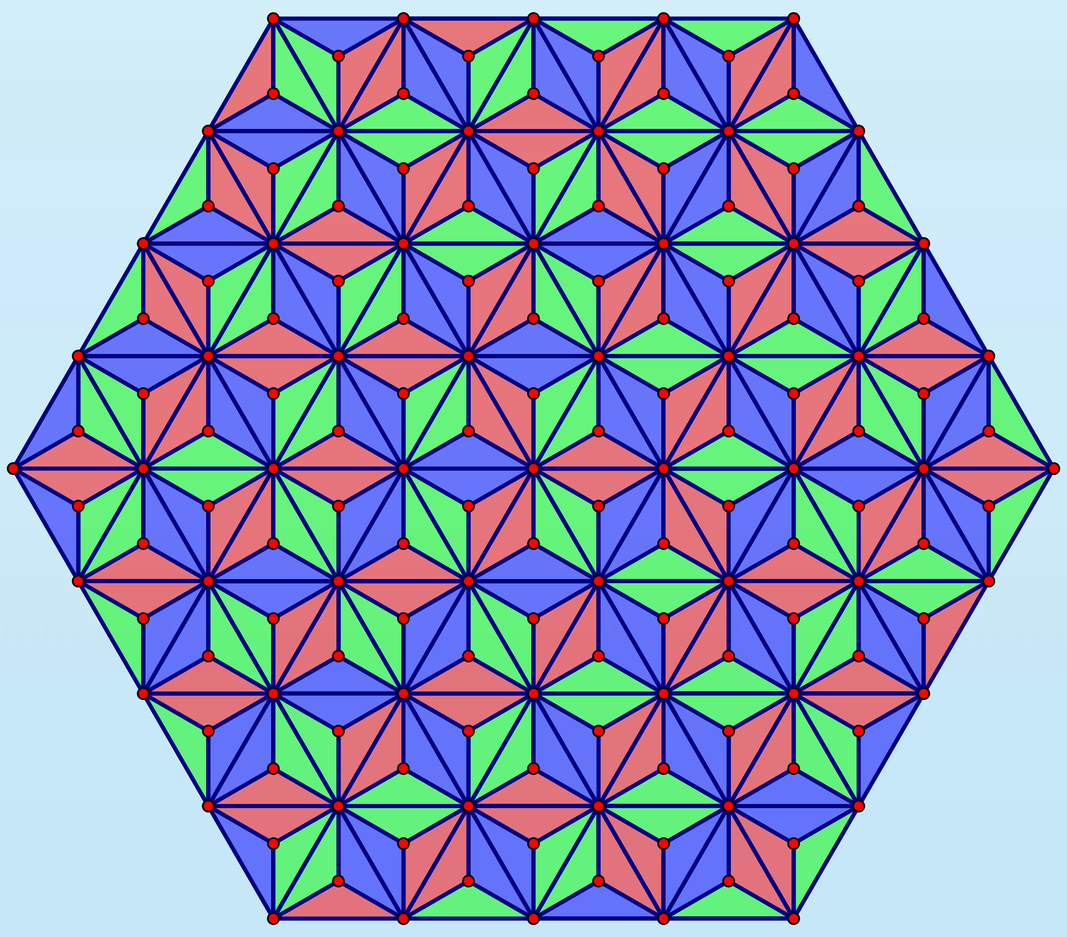


3. 三色：六種

$(x+y+z)^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$
$\quad=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2z+6xyz+3y^2z+3xz^2+3yz^2+z^3$



4. 三色的三角形鋪磚也是需要六塊都使用到才可以進行非週期性鋪磚，其圖形如下：



肆、研究結果與討論

一、由兩個方式計算潘洛斯三角形體積的通式如下

通式1：$(M-N)\times N\times N\times 3-\frac{N\times N}{2}\times N=\frac{(3M-N-N)}{2}\times N^2=\left(3M-\frac{7N}{2}\right)\times N^2$

通式2：$M\times N\times N+(M-N)\times N\times N+(M-2N-N)\times N\times N+\frac{N\times N}{2}\times N$
$\quad=\left(M+M-N+M-3N+\frac{N}{2}\right)\times N^2=(3M-\frac{7N}{2})\times N^2$

我們經由第二個方法的通式中的$(M-2N-N)$即可以看出M必大於3N時，此潘洛斯三角形才可以成立。也就是說長邊一定得大於短邊的三倍。這是我們在研究一時看不出來的，當時只發現畫出來的圖形看起來不像潘洛斯三角形。後來換個方式算體積時才發現若M不大於3N的話有一長條形的體積為負數，所以我們可以肯定當M大於3N時潘洛斯三角形才會在立體(GSP)圖形上成立。

二、我也進而導入潘洛斯多邊形的體積，用同樣方式已算出通式。雖然在一般的三維空間中潘洛斯多邊形不存在，但用同樣得理論仍舊可以算出其多邊形體積。其結果如下：$(M-N)\times N\times N\times T-\frac{N\times N}{2}\times N$

三、我用3D印表機印出潘洛斯三角形，利用實物投影機投影在紙上後發現，其圖形和維基百科上畫的相同，故我們以此圖形為基礎來算其投影面積。我們依舊用兩個分解方式算，經化簡後也是相同的。接著我們將其值帶入Excel分析其投影面積及體積的關係，想看看其投影面積和體積是否隨著M值或N值的不同有什麼一定關係？目前觀察其兩者無顯著的關係。

四、研究潘洛斯三角形旋轉角度時，我用GSP畫圖後發現，無論潘洛斯三角形為何，我們將其圖形以圓點為旋轉中心，垂直向下旋轉35度，水平逆時針旋轉45度，即可因錯視而形成一個完美的潘洛斯三角形。

五、我們在觀察潘洛斯鋪磚的研究中發現，王氏磚也存在著非週期性的密鋪。故我們用正三角形遵循著王氏磚的規則來進行鋪磚，目前最少使用了兩種顏色六個種類的三角形，也找出了非週期性鋪磚。其三種顏色也是使用了六個種類的三角形，拼出了一個非週期性的鋪磚。

伍、未來展望

一、利用GSP作圖的潘洛斯三角形立體轉動角度是此篇科展的重要發現，而錯視圖形一直是個有趣的題材，期許自己未來可以有系統的構造出更多的錯視圖形，然後再利用GSP作圖來找出轉動角度，即可馬上看出其圖形的奇妙趣味所在。

二、王氏磚的三角形鋪磚雖然有找到非週期性鋪磚，但是利用暴力搜索去拼和嘗試，希望未來能寫出程式，或是利用嚴謹的數學理論能將其完整證明其是否有唯一性，或是找出所有的可能。

三、目前正在著手進行潘洛斯三角形及非週期性密鋪在化學上化合物合成及分子結構的關聯性的研究，希望有機會能趕的及在國展上發表。

陸、參考文獻

神秘幾何體積（空間概念謎題）。台中市國中數學領域輔導團。（民104年12月17日）。取自
台中市國中數學領域輔導團: 神秘幾何體積(空間概念謎題)

維基百科。潘洛斯三角形。取自
潘洛斯三角 - 维基百科，自由的百科全书 (wikipedia.org)

藤田伸著.朱炳樹譯.(民106年5月16日).Pattern Design圖解圖樣設計

維基百科。王氏磚。取自
王氏磚 - 維基百科，自由的百科全書 (wikipedia.org)

Emmanuel Jeandel、Michaël Rao（民110年1月6日）。An aperiodic set of 11 Wang tiles。取自
An aperiodic set of 11 Wang tiles (arxiv.org)